Εικόνα που περιέχει κείμενο

Περιγραφή που δημιουργήθηκε αυτόματα

Μαθηματικές Μέθοδοι στην Οικονομική Φυσική

Οικονομικη Φυσική – Χρηματοοικονομικές Προβλέψεις

Εργασία 1ου εξαμήνου 2021-22

Του

Μαρούλη Αδαμάντιου

Επιβλέπων καθηγητής: Ζαχείλας Λουκάς

Περιεχόμενα

[1)Ανάλυση R.Shone σχετικά με τη δυναμική στη προσφορά και ζήτηση 2](#_Toc97674099)

[1.1) Ο ιστός της αράχνης 2](#_Toc97674100)

[1.2) Πειράματα στο μοντέλο 4](#_Toc97674101)

[1.3) Ανώτατες και κατώτατες τιμές 5](#_Toc97674102)

[1.4) Ανάλυση συστήματος 7](#_Toc97674103)

[2)Ανάλυση R.Shone σχετικά με μοντέλο σε συνεχή χρόνο 9](#_Toc97674104)

[2.1) Η περίπτωση δύο εταιρειών 9](#_Toc97674105)

[2.2) Η περίπτωση των τριών εταιρειών 13](#_Toc97674106)

[2.3) Η περίπτωση των τεσσάρων εταιρειών 14](#_Toc97674107)

[2.4) Ανάλυση συστήματος 16](#_Toc97674108)

[Βιβλιογραφικές αναφορές 19](#_Toc97674109)

# 1)Ανάλυση R.Shone σχετικά με τη δυναμική στη προσφορά και ζήτηση

# 1.1) Ο ιστός της αράχνης

Στην ενότητα 2.2 ο συγγραφέας αναφέρεται στο γραμμικό μοντέλο ιστού αράχνης, που εφαρμόζεται και πως ξεκίνησε σαν ιδέα. Στο παράδειγμα που δίνει μιλάει για την υπόθεση ότι η αναμενόμενη τιμή δεν είναι άλλη από εκείνη της προηγούμενης περιόδου για την οποία μιλάμε. Μας εξηγεί ότι το μοντέλο ιστού αράχνης προέκυψε από την μελέτη των γεωργικών αγορών και στην πορεία χρησιμοποιήθηκε και σε άλλες αγορές.

Στη συνέχεια ο συγγραφέας παραθέτει το μοντέλο:

(1)

(2)

(3)

(4)

Όπου οι δύο πρώτες εξισώσεις εκφράζουν την ζήτηση και προσφορά, η επόμενη την υπόθεση για το πως περιμένουμε να εξελιχθεί η τιμή ενώ στην τελευταία εκφράζεται η ισορροπία όπως και στην δική μας περίπτωση.

Στη συνέχεια για να μπορέσει να επεξεργαστεί το μοντέλο με διάφορες παραμέτρους του δίνει την εξής μορφή:

(5)

(6)

(7)

(8)

Πλέον είναι εφικτο να αντικατασταθεί η αναμενόμενη τιμή με εκείνη της προηγούμενης περιόδου κ γνωρίζοντας ότι στην περίπτωση ισορροπίας η ζήτηση ισούται με την προσφορά ο συγγραφέας παραθέτει τις εξής συναρτήσεις:

(9)

ή αλλιώς

(10)

Εάν το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία ισχύει το οποίο οδηγεί σε τιμή και ποσότητα:

(11)

Στη συνέχεια με βάση τα παραπάνω ο συγγραφέας προχωράει σε ανάλυση του συστήματος σε πρόγραμμα σε βάθος 20 περιόδων όπου καταλήγει στα παρακάτω διαγράμματα 1 και 2:

Διάγραμμα 1

Πηγή: An introduction to economic dynamics, R.Shone

Διάγραμμα 2

Chart, line chart

Description automatically generated

Πηγή: An introduction to economic dynamics, R.Shone

# 1.2) Πειράματα στο μοντέλο

Στην ενότητα 2.3 ο συγγραφέας προκαλεί τον αναγνώστη στο να πειραματιστεί με τις παραμέτρους του μοντέλου προσπαθώντας να αποδείξει ότι αλλάζοντας τiς παραμέτρους ουσιαστικά μπορεί να αλλάξει σημαντικά η σταθερότητα του σταθερού σημείου ενώ αντίθετα αλλάζοντας τις παραμέτρους απλα θα μετακινήσει το ίδιο το σταθερό σημείο. Επίσης αναφέρεται στο γεγονός ότι και το διάγραμμα ιστού αράχνης θα αλλάξει στην πρώτη περίπτωση καθώς μια τιμή μεγαλύτερη, μικρότερη ή και ίση της μονάδος σε απόλυτη τιμή θα επιφέρει διαφορετικά αποτελέσματα και συμπεράσματα.

Έπειτα από συγκεκριμένο παράδειγμα στην περίπτωση που , ορίζει , καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η ταλάντωση που φαίνεται να υπάρχει οφείλεται στο γεγονός ότι η καμπύλη ζήτησης είναι ίση με εκείνη της προσφοράς και η μια από τις τιμές θα είναι πάντα η αρχική του συστήματος.

# 1.3) Ανώτατες και κατώτατες τιμές

Σε αυτή την ενότητα ο συγγραφέας παραθέτει το μοντέλο ενδιαφέροντος και κάνει λόγω για μη γραμμικότητα που εμφανίζεται στις αγορές.

(12)

(13)

(14)

(15)

Όπως θα δούμε και εμείς αργότερα λύνοντας δεδομένου ότι σε ισορροπία ισχύει η ισότητα ζήτησης και προσφοράς φτάνουμε στην εξής συνάρτηση:

(16)

Και δεδομένου ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε όπου οδήγούμαστε στα: .

Επίσης γνωρίζοντας ότι ο συντελεστής είναι μεγαλύτερος της μονάδος σε απόλυτη τιμή μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το μοντέλο έχει ασταθές σημείο ισορροπίας.

Συνεχίζοντας ο συγγραφέας μιλάει αναλυτικά για δυο παραδείγματα όπου στο πρώτο υποθέτουμε ανώτατη τιμή πράγμα που σημαίνει ότι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το έιναι καθώς μια χαμηλότερη τιμή θα οδηγούσε σε μια τιμή για την περίοδο που θα υπερβαίνει την ανώτατη τιμή που έχουμε θέση.

Στο δεύτερο παράδειγμα υποθέτουμε κατώτερο μισθό που αντίστοιχα σημαίνει ότι η ανώτερη τιμή που μπορούμε να έχουμε για είναι καθώς μια μεγαλύτερη τιμή από αυτή θα οδηγήσει σε μια τιμή για την περίοδο που θα είναι χαμηλότερα από την κατώτερη μας τιμή.

Οι αναδρομικές μας εξισώσεις αντιστοίχως είναι οι εξής:

(17)

(18)

Στη συνέχεια δίνει περαιτέρω πληροφορίες και αναλύει τον τρόπο να δημιουργηθεί το μοντέλο όμως εδώ δεν θα παρουσιάσουμε αναλυτικά την διαδικασία.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται για κάθε περίπτωση είναι πολύ ενδιαφέρον καθώς μπορούμε να δούμε ότι για την πρώτη περίπτωση στο διάγραμμα 3 φαίνεται η τιμή αρχικά να παίρνει μια μεγάλη άνοδο, μόλις όμως η ανώτατη τιμή επιτευχθεί βλέπουμε ότι μπαίνει σε ένα κύκλο δυο περιόδων.

Αντίστοιχα, παρατηρούμε το ίδιο μοτίβο και στην δεύτερη περίπτωση καθώς μπορούμε να διαπιστώσουμε στο διάγραμμα 4 ότι μόλις η κατώτατη τιμή επιτευχθεί μπαίνει επίσης σε ένα κύκλο δυο περιόδων.

Διάγραμμα 3

Πηγή: An introduction to economic dynamics, R.Shone

Διάγραμμα 4

Πηγή: An introduction to economic dynamics, R.Shone

# 1.4) Ανάλυση συστήματος

Σ1:

(19)

(20)

(21)

(22)

Καθώς το σύστημα μας είναι όμοιο με εκείνο που είδαμε να περιγράφει ο συγγραφέας παραπάνω θα ακολουθήσουμε την ίδια πορεία.

Γνωρίζοντας ότι ισχύει η συνθήκη ισορροπίας (22) και ότι η προσδοκώμενη τιμή είναι ίση με εκείνη της προηγούμενης περιόδου (21) έχουμε:

(23)

Μετά από μερικές πράξεις φτάνουμε στο εξής:

η αλλιώς (24)

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ως σημείο ισορροπίας

, (Απωθητής με μορφή ιστού αράχνης)

Από το παραπάνω κλάσμα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι έχουμε κλίση μεγαλύτερη των σε απόλυτη τιμή καθώς είναι μεγαλύτερο της μονάδος πράγμα που σημαίνει ότι ενώ το σύστημα είναι ταλαντευόμενο δεν συγκλίνει (ασταθές σημείο ισορροπίας).

Εικόνα 1

Graphical user interface, chart, application

Description automatically generated

Όπως μπορούμε να δούμε και στην Εικόνα 1 σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες που έχουμε από το βιβλίο με αρχική τιμή και ,

στην περίπτωση που η οικονομία εξακολουθεί να ικανοποιεί την παρούσα αναδρομική εξίσωση η τιμή της μετά από 20 περιόδους αναμένεται να είναι στην ελάχιστη δυνατή τιμή .

Εικόνα 2

Chart, scatter chart

Description automatically generated

Για να επιβεβαιώσουμε τη μορφή του σημείου ισορροπίας αρκει να δείξουμε μέσω της εικόνας 3 ιστού αράχνης ότι η τιμή απομακρύνεται από το σημείο ισορροπίας καθώς περνάει ο χρόνος συνεπώς ότι είναι απωθητής.

Εικόνα 3

Chart

Description automatically generated

Γνωρίζουμε ήδη ότι είναι συνεπώς το είναι απωθητής με μορφή ιστού αράχνης, επίσης βλέπουμε ότι όσο περνάει ο χρόνος περνάμε το και συνεχίζει να απομακρύνεται.

# 2)Ανάλυση R.Shone σχετικά με μοντέλο σε συνεχή χρόνο

# 2.1) Η περίπτωση δυο εταιρειών

Στο βιβλίο ‘’Economic Dynamics – Phase Diagrams and their Economic Application’’ και ενότητα 9.4.1 ο συγγραφέας μιλάει για συνεχή μοντέλο ολιγοπωλίου εταιριών, θεωρόντας σταθερά τα οριακά κόστοι.

Ξεκινάει με την περίπτωση εταιριών με το εξής μοντέλο:

(25)

(26)

(27)

(28)

Το οποίο οδηγεί για κάθε εταιρεία σε συνολικά έσοδα και κέρδη:

Εταιρεία 1: (29)

Εταιρεία 2:(30)

Προσδιορίζοντας την δυναμική του μοντέλου υποθέτουμε για τις εταιρείες ότι το αποτέλεσμα προσαρμόζεται συνεχώς ανάλογα την απόκλιση ανάμεσα στο επιθυμητό και το πραγματικό επίπεδο.

Ως εκ τούτου:

Εταιρεία 1: , (31)

Εταιρεία 2: (32)

Φυσικά το επιθυμητό αποτέλεσμα δεν είναι άλλο από εκείνο που μεγιστοποιεί τα κέρδη υπο την προϋπόθεση ότι η άλλη εταιρεία δεν μεταβάλλει το επίπεδο παραγωγής της.

Διαφοροποιώντας τις συναρτήσης κέρδους και θέτοντας ίσον με μηδέν καταλλήγουμε στα εξής:

(33)

(34)

Έπειτα:

(35)

(36)

Αντικαθιστώντας στις δυναμικά προσαρμοσμένες εξισώσεις έχουμε:

(37)

(38)

Στη συνέχεια ο συγγραφέας μας παρέχει δυο εξισώσεις για το σημείο ισορροπίας στο οποίο τα αποτελέσματα δεν αλλάζουν.

(39)

(40)

Και το μοντέλο σε μορφή πίνακα:

*(41)*

*Ενώ ο πίνακας του συστήματος*

(42)

Με Ίχνος και ορίζουσα αντίστοιχα

*(43)*

Που ισχύουν ανεξαρτήτος την τιμή του αρκεί φυσικά να έχουν θετικές τιμές, φτάνουμε στο εξής:

(44)

Το οποίο είναι θετικό εφόσον .

Από τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές.

Ωστόσο για έχουμε τις παρακάτω:

*(45)*

*(46)*

Οι οποίες τείνουν στο σημείο ισορροπίας όπως φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα 5 παίρνοντας ενώ το τείνει στο άπειρο.

Στο διάγραμμα 5 βλέπουμε το διάγραμμα φάσης για αύτο το μοντέλο δυο εταιρειών υπο συνεχής προσαρμογές.

Όπως μπορούμε να δούμε ανεξαρτήτως από που ξεκινάμε όλα οδηγούν στο σημείο ισορροπίας ασχέτως τις αρχικές τιμές. Παρόλα αυτά ο συγγραφέας σημειώνει ότι στην παρούσα διατύπωση το μέγεθος του συντελεστή προσαρμογής δεν επηρεάζει την ευστάθεια/αστάθεια του συστήματος παρά μόνο την ταχύτητα που συγκλίνουν στο σημείο ισορροπίας.

*Διάγραμμα 5*

*Diagram

Description automatically generated*

*Πηγή:* “Economic Dynamics – Phase Diagrams and their Economic Application”, R.Shone

# 2.2) Η περίπτωση των τριών εταιρειών

Στην συνέχεια της ενότητας ο συγγραφέας προχωράει στην περίπτωση τριών εταιρειών κάνοντας την ίδια ανάλυση με εκείνη της προηγούμενης περίπτωσης και μας παρουσιάζει το μοντέλο ως εξής:

*(47)*

Και τον πίνακα του συστήματος:

*(48)*

Με ίχνος και ορίζουσα αντίστοιχα:

Υποθέτωντας τότε οι λύσεις είναι:

*(49)*

*(50)*

*(51)*

Και εφόσον έχουμε

Το σύστημα έχει σημείο ισορροπίας στο

# 2.3) Η περίπτωση των τεσσάρων εταιρειών

Τέλος ο συγγραφέας αναφέρεται στην περίπτωση τεσσάρων εταιρειών με το μοντέλο και τον αντίστοιχο πίνακα να είναι τα παρακάτω*:*

*(52)*

*(53)*

Και εφόσον έχουμε

Βλέπουμε ότι δεν υπάρχει σημείο ισορροπίας για *n=4.*

Υποθέτοντας τότε οι λύσεις είναι*:*

*(54)*

Και εφόσον

*Και (55)*

*Τ*ότε το σύστημα έχει έναν ακατάλληλο κόμβο εάν και έναν σπυροειδήκόμβο εάν όπου ο κόμβος είναι στο σημείο

Ο συγγραφέας αναφέρει ότι το μοτίβο που παρουσιάζεται στο συνεχές μοντέλο με σταθερό οριακό κόστος φαίνεται να είναι πολύπλοκο, παρότι το ίχνος παραμένει αρνητικό, η ορίζουσα εναλλάσεται σε πρόσημο με θετικό για ζυγούς αριθμούς και αρνητικό για τους περιττούς.

Φαίνεται να προκύπτει σταθερό σημείο όποτε έχουμε περιττό αριθμό n και κάποιου είδους κόμβο όποτε έχουμε άρτιο αριθμό n.

# 2.4) Ανάλυση συστήματος

Από το δοθέν σύστημα Σ2 προσδιορίζουμε τις τρεις διαφορικές εξισώσεις ως εξής:

*(56)*

*(57)*

*(58)*

Με τη χρήση του Maxima μπορούμε να εντοπίσουμε το σημείο ισορροπίας αφού χρησιμοποιήσουμε την εντολή algsys με τις τρεις διαφορικές εξισώσεις μας.

Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι το σταθερό σημείο του συστήματος το οποίο είναι το .

Στη συνέχεια βρίσκουμε την ειδική λύση για και για .

Με την χρήση της εντολής atvalue θέτουμε τις αρχικές συνθήκες και στη συνέχεια κάνουμε χρήση της εντολής desolve για να φτάσουμε στην τελική μορφή των εξισώσεων οι οποίες είναι συναρτήσει του χρόνου .

Τέλος, κάνουμε χρήση της εντολής wxplot2d για να φτάσουμε στα διαγράμματα 6α και 6β στα οποία μπορούμε να δούμε ότι στην περίπτωση που η οικονομία συνεχίσει να ικανοποιεί το παρόν σύστημα εξισώσεων για μια εικοσαετία, οι τιμές των μεταβλητών αναμένονται να είναι σε αρκετά κοντά στο σημείο ισορροπίας.

Μάλιστα στο διάγραμμα 6β μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι λίγο χρόνο μετά οι εξισώσεις μας ταυτίζονται καθώς πια έχουν φτάσει και έχουν όλες την ίδια τιμή.

Παρατηρούμε επίσης πως η συνάρτηση αρχικά εμφανίζεται υψηλότερα από τις όμως καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο βλέπουμε ότι κινείται προς την ίδια κατεύθυνση με τις άλλες δυο.

Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε ότι η συνάρτηση (κόκκινο) δεν φαίνεται στα διαγράμματα μας, αυτό συμβαίνει όχι επείδη δεν υπάρχει αλλα επειδή κινείται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως η (πράσινο) οπότε είναι η μια πάνω στην άλλη*.*

*Διάγραμμα 6α*

*A picture containing chart

Description automatically generated*

*Διάγραμμα 6β*

*Chart, line chart

Description automatically generated*

Φυσικά το ίδιο φαίνεται να συμβαίνει στο διάγραμμα 6β καθώς από ένα σημείο περιόδων και μετά φαίνεται να υπάρχει μόνο μια ενώ ουσιαστικά βρίσκοντα η μια πάνω στην άλλη.

Σχετικά με την ελκυστικότητα του σημείου ισορροπίας στο μη ομογενές γραμμικό μας σύστημα και δεδομένου ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διακρίνουσα λόγω του ότι έχουμε να κάνουμε με ένα σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων μπορούμε να αξιόποιήσουμε τα παραπάνω διαγράμματα 6α και 6β.

Φαίνεται το σημείο ισορροπίας να είναι ευσταθές ή αλλιώς ελκυστικό καθώς ανεξαρτήτως των αρχικών τιμών που έχουν οι εξισώσεις φαίνεται σε βάθος χρόνου να καταλήγουν στο σημείο ισορροπίας και όχι να απομακρύνονται από αυτό.

Αυτό συμβαίνει καθώς σε τέτοιου είδους αγορές η τιμές πάντα τείνουν προς το σημείο ισορροπίας είτε βρίσκοντα πάνω είτε κάτω από αυτό, η αγορά πάντα τείνει προς την ισορροπία βέβαια σε ρεαλιστικά σενάρια αυτό συνήθως παίρνει χρόνο και ίσως και να μην φτάσει πραγματικά ποτέ εκεί καθώς μπορει με την πάροδο του χρόνου να αλλάξουν άλλες μεταβλητές οι οποίες θα επηρεάσουν ανάλογα.

# Βιβλιογραφικές αναφορές

[1] “An introduction to Economic Dynamics” Cambridge University June 2012 – Ronald Shone

[2] “Economic Dynamics – Phase Diagrams and their Economic Application” Cambridge University October 1997 – Ronald Shone